Segundo Parcial
16 de Diciembre de 2019

ÁLGEBRA LINEAL

Tiempo 2h.

1. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

(a) (i) (**1 punto**) Hallar las coordenadas en la base $\mathcal{B}$ del vector v ortogonal a v_1, que forma un ángulo de $\pi/4$ con los vectores v_2 y v_3 y que tiene norma $||v|| = \sqrt{2}$.

(ii) (**0.8 puntos**) Calcular la distancia y el ángulo que forma el vector v del apartado (i) con el vector $w = 2v_1 + v_2 - v_3$.

(b) (**0.7 puntos**) Razonar la veracidad o falsedad del siguiente enunciado:

Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tales que $w \perp (u+v)$. Entonces $w \perp u$ y $w \perp v$.

SOLUCIÓN

(a) $x = \frac{\langle \vec{v}, \vec{v}_1\rangle}{\|\vec{v}_1\|^2} = 0, y = \frac{\langle \vec{v}, \vec{v}_2\rangle}{\|\vec{v}_2\|^2} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1, z = \frac{\langle \vec{v}, \vec{v}_3\rangle}{\|\vec{v}_3\|^2} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1$, por lo que $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$

(b) $d(\vec{v}, \vec{w}) = d(\vec{v}_3 + \vec{v}_2, 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3) = \|\vec{v}_3 + \vec{v}_2 - (2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3)\| = \|2\vec{v}_3 - 2\vec{v}_1\| = 2\|\vec{v}_3 - \vec{v}_1\| = 2\sqrt{\langle \vec{v}_3 - \vec{v}_1, \vec{v}_3 - \vec{v}_1\rangle} = 2\sqrt{2}$

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} = \frac{\langle \vec{v}_3 + \vec{v}_2, 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3\rangle}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

(c) Falso, tomemos por ejemplo $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Dado el subespacio vectorial

$$S = \mathcal{L}(\{(0,0,1), (1,1,1)\}).$$

(a) (**0.5 puntos**) Obtener una base ortonormal de S.

(b) (**0.8 puntos**) Obtener unas ecuaciones implícitas y una base del subespacio $S^\perp$, complemento ortogonal de S.

(c) (**0.7 puntos**) Calcular la proyección ortogonal del vector $u = (5, -1, 3)$ sobre el subespacio S y sobre $S^\perp$.

(d) (**0.5 puntos**) Calcular la distancia entre el vector u del apartado anterior y S.

SOLUCIÓN.

(a) GRAM-SCHMIDT $\vec{o}_1 = \vec{w}_1, \vec{o}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\langle \vec{w}_2, \vec{o}_1\rangle}{\|\vec{o}_1\|^2}\vec{o}_1$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \|\vec{o}_1\|^2 = 3, \|\vec{o}_2\|^2 = \frac{2}{3}$$

Pero si primero vamos a por la base usual $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{E_{12}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, deducimos la base ortogonal $B^{ORT} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y, dividiendo cada vector por su norma, tenemos la base ortonormal $B^{ORTN} = \left\{\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

(b) Cualquier vector del complemento ortogonal ha de ser ortogonal a los dos vectores de la base del subespacio, así se obtienen las ecs. Imp. Del mismo

$$\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Una base del mismo es $B(S^{\perp}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) Calculamos los productos escalares y normas que intervienen en la fórmula de la proyección: $\langle \vec{u}, \vec{n}_1 \rangle = {}^{4}/_{\sqrt{2}}, \langle \vec{u}, \vec{n}_2 \rangle = 3,= \,,.\ \|\vec{n}_1\|^2 = \|\vec{n}_2\|^2 = 1$

$\vec{p}_S(\vec{u})$= ${}^{4}/_{\sqrt{2}}\vec{n}_1 + 3\vec{n}_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{p}_{S^{\perp}}(\vec{u})$= $\vec{u} - \vec{p}_S(\vec{u})$= $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$-$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) D$(\vec{u}, S) = d(\vec{u}, \vec{p}_S(\vec{u}))$= $\|\vec{u} - \vec{p}_S(\vec{u})\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

3. Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (**0.5 puntos**) Justificar que A es ortogonalmente diagonalizable.

(b) (**0.5 puntos**) Calcular los autovalores de A.

(c) (**1 punto**) Determinar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A.

(d) (**0.5 puntos**) Encontrar una matriz ortogonal P tal que $P^T AP$ es una matriz diagonal.

SOLUCIÓN.

Al tratarse de una matriz simétrica, admite diagonalización ortogonal. EL POLINOMIO Característico lo calculamos teniendo en cuenta que : det(A)=-4, tr(A)=3, SDP=0. Por lo que $P_3(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = (-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$. Con lo cual

$$\sigma(A) = \begin{Bmatrix} -1 & 2 \\ m(-1) = 1 & m(2) = 2 \end{Bmatrix}$$

λ =-1, $Ker(A+I)$=$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases} \right\}$.

Entonces una base de este subespacio –recta será:

$$B(Ker(A+I)) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Y una base ortonormal es

$$B^{ON}(Ker(A+I)) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = 2, Ker(A-2I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -x + y + z = 0 \right\}$$

Entonces una base de este subespacio –plano será:

$$B\big(Ker(A-2I)\big)=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Aplicamos G-S para obtener la base ortonormal

$$B^{ON}\big(Ker(A-2I)\big)=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

La Base de diagonalización= $B_{diag}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$

Matriz de Paso de diagonalización=P=$\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

Matriz diagonal $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

4. (a) **(0.7 puntos)** Hallar las ecuaciones del giro g en $\mathbb{R}^2$ con centro el origen, tal que

$$g\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

(b) **(0.8 puntos)** Sea el endomorfismo f con matriz asociada respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$

$$A=M(f,\mathcal{B}_c^2,\mathcal{B}_c^2)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}.$$

Analizar si f es una aplicación ortogonal. En caso afirmativo, clasificar y obtener sus elementos geométricos.

(c) **(1 punto)** Hallar la matriz, respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, de la simetría rotacional de ángulo $\alpha=\frac{\pi}{2}$ y cuyo eje es la recta que pasa por el origen con la dirección y sentido dados por el vector $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN:

(a) Calculamos el ángulo que forman el vector y su girado

$$\cos\alpha=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\|}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}$$

Entonces $M\big(g,B_2^C\big)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$

(b) Primero comprobamos que es ortogonal verificando que se cumple que $A^tA=I$. Como la matriz dada es ortogonal y simétrica representa una simetría cuyo eje es $Ker(A-I)$. Entonces

$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y = 0.$

(c) Calculamos primero una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, $B^{ON} = \{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ para la cual sea

$$M(SR_\pi, B^{ON}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como primer vector de la base cogemos el unitario del eje de giro , es decir $\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y su imagen vale $SR_\pi(\vec{n}_1) = -\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B^{ON}}$ Los otros dos vectores serían dos vectores perpendiculares situados en el plano perpendicular al eje de giro (x+y=0) y de norma uno, por ejemplo

$$\vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y su imagen vale $SR_\pi(\vec{n}_2) = \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B^{ON}}$, $SR_\pi(\vec{n}_3) = -\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B^{ON}}$, con lo que

$$M(SR_\pi, B^{ON}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, para la orientación, calculamos el determinante $Det\big(col(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)\big) = -1$ y deducimos que la base $B^{ON} = \{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ tiene orientación negativa. Tenemos que cambiar los vectores de orden en la base, quedando ésta

$$B^{ON} = \left\{\vec{n}_1{}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n}_2{}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n}_3{}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Por último hacemos un cambio de base

$M(SR_\pi, B^C{}_3) = C(B^{ON}, B^C{}_3) M(SR_\pi, B^{ON}) C(B^C{}_3, B^{ON})$=

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones de la simetría rotacional quedan

$$y_1 = \frac{1}{2}(-x_1 - x_2 + \sqrt{2}x_3)$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(-x_1 - x_2 - \sqrt{2}x_3)$$

$$y_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_2)$$